Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

Вязьма-Брянская средняя общеобразовательная школа

имени Героя Российской Федерации А.В.Пуцыкина

Вяземского района Смоленской области

Маленькие символы с большим значением

(Язык и логика в математике)

Вязьма

2013

**Оглавление**

**Стр**

I. Введение. 1

II. Основная часть.

1.Как и почему появился язык математической логики? 2

2.Зачем изучать формальный язык математики? 3

3.Об истории возникновения логического языка. 3-5

4. Язык и логика

4.1. Высказывания. 6-7

4.2. Общие утверждения. 7

4.3. «Хотя бы один». 7

4.4. О доказательстве общих утверждений. 7-8

4.5. Введение обозначений. 8-9

4.6. Равносильность предложений. 9-10

4.7.Определения. 10

5. Отрицание высказываний.

5.1. Понятие отрицания. 11-12

5.2. Отрицание общих высказываний. 12-14

5.3. Отрицание высказываний о существовании. 14

6.Переменная.

6.1.Понятие переменной. Выражения с переменными. Предложения с переменными. 15-16

6.2. Переменная и кванторы. 16

6.3. Отрицание утверждений с кванторами. 17

7.Логическое следование.

7.1. Понятие логического следования. 17-21

7.2.Отрицание следования. 21

7.3. Обратное утверждение. 22

7.4.Следование и равносильность. 22-23

7.5. Следование и свойства предметов. 23-25

8.Использование основных математических символов и логических операторов в теории вероятностей. 25-27

9. Примеры заданий с использованием операторов и основных

математических символов при решении алгебраических задач. 27-29

III. Заключение. 30-32

IV. Литература. 33

**Введение**

**Цель работы – узнать:**

- какие основные математические символы, логические связки и операторы используют в математике;

- какую информацию они несут;

- как правильно ими пользоваться при решении различных задач;

- как можно упростить и сделать более компактными и удобными в обращении математические записи.

**Для достижения поставленной цели** в данной работе **решаются** следующие **задачи:**

1.Собрать и изучить теоретический материал.

2.Рассмотреть и показать применение языка математической логики на различных конкретных примерах.

**Логика** (от древнегреческого *logos – слово, выражающее мысль*) является началом любой научной теории.

Несколько десятилетий назад у нас в стране логике не учили ни в школах, ни в вузах: она была объявлена лженаукой и изгнана из всех учебных заведений. Считалось, что само определение «формальная» дискредитирует логику как науку, свидетельствуя о её бесполезности и ненужности. В педагогике дело представлялось так, будто изучение и использование формальной логики ведет к формализму в знаниях. Формальность же логики и формализм в знаниях никак не связаны, а точнее - связаны тем, что логика помогает усваивать знания осознанно, с пониманием, то есть не формально. Как говорил академик П. Анохин: «…Информация заливает нас. Но как бороться с этим половодьем? Единственный путь - не запоминать все, что течет в этом потоке, а логически упрощать. Мне трудно разговаривать с человеком, когда я вижу, что у него нет элементарной логической культуры. Логика нужна любому специалисту, будь он математик, медик или биолог. Логика – это необходимый инструмент, освобождающий от лишних, ненужных запоминаний, помогающий найти в массе информации то ценное, что нужно человеку. Без логики – это слепая работа». Именно это, а также ежедневное логическое мышление в повседневной жизни и в особенности на уроках математики подтолкнуло нас познакомиться с этой темой более подробно.

**Основная часть**

**1. Как и почему появился язык математической логики?**

Математика изучает объекты, свойства которых точно сформулированы. Какие формулировки можно считать точными? Очевидно, что не все то, что сказано на естественном языке, точно. Иногда эта неточность лежит на поверхности, как, например в фразах: «Хочется чего-то, а чего- неясно» или «Оно, конечно, ежели что как… А ежели что не так?». Иногда смысл фразы зависит от контекста. Например: «Сейчас я намылю ему шею». Богатство любого естественного языка неразрывно связано с его многозначностью. Зависимость от контекста не всегда отрицательный фактор, лишь бы в любой данной ситуации предложение уточнялось однозначно.

Вот от такой неоднозначности хотелось бы раз и навсегда застраховаться в математике. Поэтому математики с самого начала стремились формулировать доказательства и теоремы на как можно более четком, хотя и бедном, диалекте естественного языка. Хотя словарный запас этого диалекта постоянно расширяется, основные формы предложений, связки, союзы остаются практически теми же, что были выработаны еще в античные времена. Следует заметить, что способы выражения, допустимые в математике, нигде не описывались явно, ими овладевали на примерах, в процессе обучения и чтения классических трудов, в первую очередь «Элементов» Евклида.

Долгое время считалось, что «математический диалект» состоит из строго сформулированных предложений, да и сейчас он верно служит математикам, почти никогда их не подводя. В геометрии и до сих пор его достаточно. Но уже в средние века развитие алгебры привело к тому, что формулировки теорем становились все длиннее и неудобнее. Соответственно, выкладки становились все более трудными.

Например, для того, чтобы понять фразу «Квадрат первого, сложенный с квадратом второго и судвоенным первого на второе, есть квадрат первого, сложенного со вторым» требуется значительное усилие. Таким образом, математическая строгость и удобство начали противоречить друг другу. Выход был найден, когда заметили, что эта фраза может быть записана кратко и ясно: x²+2xy+y²=(x+y)².

Это стало первым этапом уточнения математического языка: был создан символизм арифметических выражений, их равенств и неравенств. К 18 веку математические формулы записывались почти в том же виде, что и сейчас.

Язык математической логики, ставший символическим языком современной математики, возник в тот момент, когда неудобство математического языка для нужд математики было окончательно осознано. Вместе с тем впервые появилась возможность строго ответить на вопрос: а что значит «точно сформулированное высказывание»? Это высказывание, которое может быть однозначно переведено на символический язык математики.

**Основная задача языка математики** - *дать точное и удобное определение математического суждения, то есть дать такой язык, который удовлетворял бы требованиям:* 1) *на него возможно перевести математические утверждения;*

*2) он допускал бы сравнительно легкий перевод на обычный язык;*

*3) записи на нем были бы компактны и удобны в обращении.*

**2. Зачем изучать формальный язык математики?**

Так ли необходимо изучать язык математики, если мы не собираемся быть специалистом в области математической логики? Ведь столько лет без него обходились, почему не обойтись и дальше? Первый из возможных ответов на данный вопрос состоит в том, что незнание мощных и простых методов преобразований математических предложений, все равно что незнание основ математики. Просто грех не пользоваться точными и едиными правилами там, где они уже проработаны, и каждый раз «изобретать заново велосипед».

Второй ответ: в нынешние времена люди все равно вынуждены изучать искусственные, формальные языки. В частности, имея дело с вычислительными машинами, мы не обойдемся, по крайней мере 2-3 искусственными языками – языками программирования.

Третий ответ связан со спецификой самой работы прикладного математика, где все время нужно заниматься переводами с содержательного языка на математический, с математического - на язык численных методов и алгоритмов, с языка алгоритмов на конкретный язык программирования и обратно. Такая многоязыковость неизбежна: она вызвана необходимостью находить точные и реализуемые решения задач, возникающих на практике.

Язык математической логики (язык предикатов) используется либо прямо, либо как основа и в других логических системах.

**3. Об истории возникновения логического языка**

Логика, как наука о способах мышления приводящих к истине, возникла в глубокой древности. Начало науки о законах и формах мышления связывают с именем Аристотеля. Именно Аристотель (384-322 гг. до н.э.) создал чистую систему правил вывода, что и привело к возникновению теории логики. Математическое исследование этих вопросов берет свое начало от основополагающего труда Джорджа Буля, изданного в Лондоне в 1854г. Этот труд Буля положил начало математической логики, систематическое развитие которой было достигнуто работами многих математиков XX века.

Правила вывода позволяют преобразовывать исходные утверждения подобно тому, как тождественные преобразования в математике, дают возможность решать различные системы уравнений. Следующим шагом формализации логики является появление специальной символики для точной и компактной записи утверждений и определения операций над ними.

Идея перенесения тех методов, которые обычно используются в математике, на логику была реализована Б. Паскалем (1646-1716гг.), Г. Лейбницем (1646-1716гг.), Дж. Булем (1815-1864гг.), О. Де Морганом (1806-1871гг.), Г. Фреге (1848-1925гг.), Б. Расселом (1872-1970гг.), Д. Гильбертом (1862-1943гг.), А. Марковым (1903-1979гг.) и др. Так появился язык логики как логическое продолжение языка математики.

С появлением языка математической логики стало возможным составлять алгоритмы логического вывода. Стали вести речь о создании «искусственного интеллекта». В последнее время логика находит все более широкое применение в технике при исследовании и разработке вычислительных машин, дискретных автоматов. Ее методы используются в теории преобразования и передачи информации, теории вероятностей и комбинаторном анализе. Математическая логика находит свое применение в экономике, биологии, медицине, психологии, праве, языкознание.

В середине 19 века в математике передовым и бурно развивающимся разделом была абстрактная алгебра. Были созданы структуры, в которых можно найти порядок и меру. Были созданы новые числовые системы, новые в геометрии и возникло большое желание перенести алгебраические методы на другие области. Это с успехом проделала английская школа, родоначальником которой можно считать де Моргана, а наибольшую известность получил Джордж Буль. Они заметили, что простейшие операции над множествами подчиняются законам коммуникативности, ассоциативности и дистрибутивности. Они провели аналогию между объединением и сложением, пересечением и умножением, пустым классом и нулем, самым большим классом (универсом) и единицей…

Нашлась и операция, очень похожая на вычитание, а вот аналогию делению никак не удавалось подобрать, и из-за этого английские алгебраисты-логики чувствовали себя несколько ущербно: что же за алгебра без деления! Весь остаток 19 века они пытались изобрести деление, но так ничего и не придумали. К концу 19 века появилась теория многоместных отношений, которая впоследствии превратилась в математический язык логики предикатов.

Другие ученые в Германии (Г. Фреге), Италии (Пеано) попытались записывать математические высказывания. Фреге ввел в математический обиход понятие бесконечного множества и построил всю систему теории множеств. Позже уже, в 20 веке, выяснилось, что есть еще три исходных понятия, к которым можно свести всю математику:

- понятие функции вместе с операциями;

- понятие имени вместе с операцией именования понятия и отношением;

- понятие системы, которое делает осмысленным отношение «часть-целое».

Пеано подошел к созданию символического языка, и эта система обозначений оказалась самой удачной. Впоследствии ее лишь подправляли. Пеано ввел **кванторы всеобщности x** и **существования x**, да и само слово «квантор».

**Алгебра логики** (алгебра высказываний) – раздел математической логики, в которой **изучаются логические операции над высказываниями.**

*Базовыми элементами, которыми оперирует алгебра логики, являются высказывания.* Высказывания строятся над множеством {В,¬,,0,1}, где В – непустое множество, над элементами которого определены три операции:

¬ - отрицание,

- конъюнкция,

- дизъюнкция, а также константы – логический 0 и логическая 1. (0 – ложь, 1 – истина)

Для часто встречающихся множеств мы пользуемся следующими обозначениями:

N - множество натуральных чисел;

Z - множество целых чисел;

Q - множество рациональных чисел;

R - множество действительных чисел;

C - множество комплексных чисел;

V - множество точек пространства;

L - множество прямых;

P - множество плоскостей.

Употребляются также общепринятые символы отношений, такие как <, >,,, =, , и т.д.Кроме того, для геометрических объектов используют следующие символы:

Х a (точка Х лежит на прямой a);

a α (прямая а лежит в плоскости );

ab (прямые a и bпересекаются), и т.д.

**Логические связки**

1) **Связка «и».** Союзу «и» сопоставляются логическая связка (&). Символ называется **конъюнкция**. Эта связка применяется при переводе на формальный язык утверждений вида «A и B», «A вместе с В», «как А так и В» и т.д.

2) **Связка «или»**. «А или В» символически записывается АB. Знак называется **дизъюнкцией.** Эта связка применяется при переводе утверждений «А или В или оба вместе», «либо А, либо В» и т.д.

3) **Связка «следует».** «Из А следует В» символически записывается: АВ. Знак называется **импликацией.** Его используют для предложений типа «А достаточное условие дляВ», «В необходимое условие для А», «А, только если В» и т.д.

4) **Связка «тогда и только тогда».** «А тогда и только тогда, когда В» символически записывают так: АВ. Знак называют **эквивалентностью** или равносильностью. Той же связкой переводят предложение «А эквивалентно В», «А необходимое и достаточное условие для В».

5) **Связка «не».** Утверждение «не А» символически записывается ¬А. Знак ¬ называется **отрицанием.** Эта связка используется при переводе выражений «А неверно», «А ложно» и т.д.

*Связки ,¬ называются связками исчисления высказываний или пропозициональными связками.*

6) **Связка «для всех».** Утверждение «для всех х верно А(х)» символически записывается А(х). Символ называется **квантором всеобщности**. Эта же связка используется при переводе утверждений «А верно при любом значении х», «каково бы ни было х, А(х)» и т.д.

7) **Связка «существует».** Утверждение «существует такое х, что А(х)» записывается на языке математики как ­­А(х). Знак называется **квантором существования**. Эта же связка применяется при переводе утверждений «А(х) верно при некоторых х», «есть такое х, при котором А(х)» и т.д.

**4. Язык и логика**

**4.1. Высказывания**

Речь человека, тексты, которые он читает и пишет, состоят из предложений. Это касается и обычного, и математического языка. То, что говорится в каждом предложении, может оказаться верным или неверным. Например, в учебникеможно прочитать верное предложение "Земля вращается вокруг Солнца", а в таблице умножения - предложение 22=4. А если ученик скажет, что семью семь сорок семь- это будет неверное предложение. Верные и неверные предложения называют в математике **высказываниями** или **утверждениями**. При этом вместо слов "верно" и "неверно" часто говорят **истинно** и **ложно**. Таким образом, утверждения бывают истинные и ложные. **В высказываниях** всегда **можно выделить тему** – то, *о чём говорится*, и **рему** - то, *что сообщается о теме.* Например, в написанном выше предложении говориться о планете Земля - это *тема,* и сообщается, что она вращается вокруг Солнца - это *рема*. Точно также в математическом предложении 28+36=64 говорится о сумме чисел 28 и 36 и сообщается, что эта сумма равна 64. Не всякое предложение является утверждением. В самом деле, если кто-нибудь спрашивает "который час?" или кричит "Ура!", не имеет никакого смысла говорить о том,верны или неверны эти предложения. В первом из этих предложений тема есть, а ремы нет,а во втором нет даже темы.

**Пример:**

*Найти в высказываниях тему и рему. Какие из этих высказываний истинны, а какие - ложны?*

а)В каждом январе 31 день. ( *Тема* – говорится о январе, *рема* – сообщается, что в январе 31 день. Высказывание истинное).

б) В каждом феврале 28 дней.

в) Всякое трехзначное число больше 100.

г) Следующий день после воскресенья – вторник.

**4.2. Общие утверждения.**

Особое значение для математики имеют **общие утверждения.** Так называют высказывания, в которых утверждается, что **все** элементы некоторого множества обладают определённым свойством. Общий характер высказывания выражается словами: **любой, каждый, все, всегда** и т.п. *Например:*  1.Произведение **любого** числа на 0 равно 0.

2.Сумма **любых** двух чисел не зависит от порядка слагаемых

3.Во **всяком** треугольнике сумма углов составляет 180 градусов

4.Сумма двух натуральных чисел **всегда** делится на 3

5.Произведение **любых** двух натуральных чисел больше их суммы.

Очень часто обобщающие слова опускают, и приведённые высказывания произносят короче:

1. Произведение числа на ноль равно нулю.

2. Сумма двух чисел не зависит от порядка слагаемых.

3. Сумма углов треугольника равна 180

4. Сумма двух натуральных чисел делится на 3.

5. Произведение двух натуральных чисел больше их суммы.

Тем не менее, все эти высказывания являются общими утверждениями - общность в них не указывается, а только подразумевается. Общее утверждение, как и всякое высказывание, может оказаться как истинным, так и ложным. Так, в приведённых примерах первые 3 утверждения истинные, а последние 2 - ложные. Действительно, сумма двух натуральных чисел не всегда делится на 3: например, 1+3=4 на 3 не делится. Этот пример показывает, что последнее общее утверждение ложно, т.е. *опровергает* это утверждение. Пример, опровергающий общее утверждение, называют **контрпримером.** Приставка ,,контр,, ( против) подчёркивает, что речь идёт именно об опровержении утверждения.

**4.3. «Хотя бы один»**

Другой важный для математики тип утверждений - это утверждение о том, что в заданном множестве существует **хотя бы один** элемент, обладающий определённым свойством. Например:

*Можно найти такое натуральное число k, что 57=3k. Существует такое натуральное число x, что (2x+3):7=11. Некоторые люди имеют рост 2м 20 см. Произведение двух натуральных чисел может быть больше их суммы.*

*Сумма двух натуральных чисел не всегда делиться на 3.Грибы не всегда съедобные.*

В противоположность утверждению типа "все", истинность утверждения типа " хотя бы один" с помощью примера можно доказать. Так, в первом примере достаточно взять k=19- ведь 57=3\*19, а во втором примере можно убедиться, что указанным свойством обладает x=37. В третьем примере надо найти *хотя бы одного* человека ростом выше 2м 20см, а в последнем *хотя бы один* несъедобный гриб. Утверждения типа **"хотя бы один"** называют также утверждениями о **существовании:** в них говорится, что в множестве существует хотя бы один элемент, обладающий заданным свойством.

**ПРИМЕР:** Найти общие утверждения, высказывания типа " хотя бы один", и высказывания, не относящиеся к этим двум видам утверждений.

*1) Можно найти существительное, состоящие из 7 различных букв. («хотя бы один»).*

*2).У кошки четыре ноги (общее).*

*3). Костя Иванов – отличник. (ни то, ни другое).*

*4). В доме может быть больше 10 этажей. («хотя бы один»).*

*5). Акулы – хищные рыбы (общее).*

**4.4. О доказательстве общих утверждений**

Итак, утверждения о существовании доказываются приведением примера. А как доказываются общие утверждения? В общем утверждении ( утверждении типа **,,все,,**) говорится, что **все элементы некоторого множества обладают определённым свойством.** Поэтому самый простой приём доказательства состоит в том, что мы,,**испытываем,, по очереди все элементы множества:** перебираем их один за другим и для каждого проверяем наше утверждение. Когда эти элементы "закончатся", то утверждение будет доказано. Например, для доказательства того, что в математическом кружке занимаются все мальчики из 5 "А", достаточно фамилию каждого мальчика из классного журнала найти в списке участников кружка. Но в математике дело обстоит не так просто - из-за того, что часто приходится иметь дело с бесконечными множествами, например, со всеми натуральными числами.Элементы бесконечного множества уже нельзя испытать все, и при любом числе испытаний может оказаться, что ещё непроверяемый элемент как раз и опровергает утверждение, которое мы хотим доказать. Представим себе, например, что в непрозрачный мешок положили столько шаров, сколько существует натуральных чисел. Ясно, что если мы вытащим поочерёдно тысячу, миллион или сколько угодно белых шаров, то нет никакой гарантии, что следующий шар не окажется, скажем, чёрным. Поэтому посредством перебора нельзя убедиться, что все шары в мешке именно белые. Если бы можно было однозначно ответить на вопрос, как доказываются общие утверждения, то математической науки не существовало бы. Однако до сих пор в математике есть утверждения, для которых не придуманы доказательства - это **математические проблемы.** В связи с каждой такой нерешенной проблемой, с недоказанным утверждением одни математики думают, что это утверждение верно, другие предполагают, что оно неверно, но ни те, ни другие не считают своё мнение окончательным до тех пор, пока утверждение не будет доказано или опровергнуто.

**4.5. Введение обозначений**

В доказательствах общих утверждений, как правило, есть один и тот же шаг-**введение обозначения.** Подобно тому, как в обычной жизни люди называют друг друга по именам, в математике для рассмотрения любого объекта ему дают имя- обозначение. Если требуется доказать, что все элементы данного множества обладают определённым свойством, берут **произвольный** элемент этого множества и обозначают его какой-нибудь буквой. После присвоения элементу некоторого имени он становится для нас как бы известным, хотя мы знаем о нём лишь то, что он принадлежит данному множеству. При введении обозначений в математике, как и в других науках, имеются определённые традиции, правила называния, которые нарушать не принято. Так, по традиции неизвестные числа при решении текстовых задач обозначаются буквами x и y. А если, например, речь идёт о задачах на движение, то для обозначения пути, скорости и времени используются буквы S,V,t. Площадь геометрических фигур чаще всего обозначается буквой S, периметр многоугольника - буквой P, объём геометрического тела- буквой V. Посмотрим, как введение обозначений помогает доказать математические утверждения.

**ЗАДАЧА.**

*ДОКАЗАТЬ, ЧТО СУММА ЛЮБЫХ ТРЁХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДЕЛИТСЯ НА 3.*

Напомним, что когда мы говорим " делится", мы имеем в виду " делится без остатка". Возьмём произвольное натуральное число и обозначим его буквой n. Тогда следующие за ним два числа равны соответственно (n+1) и (n+2). Мы должны доказать, что сумма этих трёх чисел, т.е. число (n+(n+1)+(n+2)) делится на 3. Преобразуем полученную сумму, используя переместительное и сочетательное свойства сложения: n+(n+1)+(n+2)=n+n+1+n+2=3n+3. По распределительному свойству, 3n+3=3(n+1) – делится на 3 без остатка. Следовательно, данная сумма делится на 3 (без остатка).

**4.6. Равносильность предложений**

В математическом языке, кроме знаков арифметических действий и знаков сравнения, есть и другие знаки, помогающие легче и проще записывать предложения из обычного языка. К таким знакам относится **знак равносильности**, который мы использовали для краткой записи свойств делимости. В действительности, понятие **равносильности предложений** относится не столько к математике, сколько к обычному, естественному языку. Как в обычном, так и в математическом языке одну и ту же мысль можно выразить несколькими разными способами, в том числе и на разных языках. Например: 1)Вася - брат Кати, Катя - сестра Васи, Катя и Вася имеют одних и тех же родителей. 3) 2 больше 5, 2<5, 5>2.

В каждом отдельном из этих примеров все предложения означают одно и тоже, только выражены разными способами. Знак употребляется для краткой записи утверждения, что **два предложения означают одно и тоже.**  Пишут: 2<55>2. Обратим внимание на написание знака равносильности: если убрать из него " стрелки" слева и справа, то останется знак равенства =. Это не случайно. Знак равенства между двумя числовыми выражения показывает, что эти выражения имеют одно и тоже значение, то есть означают одно и тоже: например, 22=4. Знак равносильности имеет такой же смысл, но применяется не для числовых выражений. а для предложений - высказываний или высказывательных форм (предложений с переменной). Отметим, что для правильного вывода о равносильности двух предложений у человека может не хватать знаний. Для человека, недостаточно знакомого с математикой, предложения " Число k делится на 3" и " Сумма цифр числа k делится на 3" вовсе не означают одно и тоже. Однако нам уже известен признак делимости натурального числа на 3: "Число k делится на 3 **в том и только том случае,** когда сумма цифр числа k делится на 3". Поэтому для нас эти два предложения означают одно и тоже: сказать о натуральном числе k, что оно делится на 3 - это то же самое, что сказать, что сумма цифр делится на 3. Знак равносильности имеет тот же самый смысл, что и слова " **в том и только в том случае"**, часто употребляющиеся в математическом языке. Поэтому мы и записывали признаки делимости с помощью этого знака: «Число k делится на 3 <=> Сумма цифр числа k делится на 3». Кстати, вместо слов "**в том и только том случае"** в математике употребляется и некоторые другие выражения такого типа - например, **" тогда и только тогда", " если и только если",** и другие.

**Задача.***Какие из следующих утверждений, записанных с помощью знака равносильности верны?*

1). a - b=c c+a=b (ложно)

2). a - b=c c+b = a (истинно)

3). Число х в 2 раза больше yx=2y (истинно)

4). 5 (ложно)

**4.7.Определения**

Когда человек изучает язык, каждое новое слово он узнаёт либо от другого человека, либо из словаря. Например, узнав из словаря, что " cat, Katze, chat"- кошка, в дальнейшем можно понимать и произносить на иностранном языке предложения, в которых речь идёт о кошке. Точно такая же ситуация и в математике. Каждое новое слово математического языка специально разъясняется. Предложения, в которых разъясняется значение новых слов, в математике называют **определениями**. Математических определений мы уже знаем довольно много. Обычно, в них имеется слово "называется", например: *определение разности.* Разностью а-b чисел а и b*называется* такое число с, которое при сложении с b даёт а.

*Определение правильной дроби*: дробь *называется* правильной, если её числитель меньше знаменателя.

В этих предложениях даются определения двух слов "математикорусского" словаря. При этом каждый раз значение "нового", незнакомого слова разъясняется с помощью знакомых, "старых" слов.Это и есть главное черта определения: **смысл " нового" в нём объясняется через"старое".**Узнавая новое слово в повседневной жизни, мы также встречаемся с определениями. *Например, что такое год?* Отвечая на этот вопрос, обычно говорят, что год это промежуток времени, за который земля совершает один оборот вокруг Cолнца. Но это и есть определение года, которое в стандартном виде звучало бы так: *Годом* называется промежуток времени за который земля совершает один оборот вокруг Cолнца. Таким образом, определения могут даваться в разных формах, иногда и без главного слова - «называется». Но всегда в определении есть слово, которое появляется впервые как "новое" и объясняется через уже известные "старые"слова.

Для записи многих определений очень удобно использовать знак равносильности. Например:

|  |
| --- |
| a:b=c cb=a |
| Дробь – правильнаяx<y |
| a-b=c c+b=a |

Например, когда говорят о простых и составных числах, о делимости, то всегда имеются ввиду натуральные числа. Наконец, длинное слово"существует" с обязательным продолжением"такое, что" иногда заменяются особой буквой Поэтому, например определение кратного может быть записано короче:

|  |
| --- |
| а кратно bc: а = bс. |

Заметим, что буквы нет ни в одном из естественных языков, она употребляется только в математическом языке для краткости.

**5.Отрицание высказываний**

**5.1. Понятие отрицания**

Когда люди спорят, одни из них считают некоторое утверждение истинным, а другие – ложным. Так, в течение многих веков ученые спорили о том, истинно или ложно утверждение «Солнце вращается вокруг Земли». Еще несколько веков назад все были уверены, что это утверждение истинно, притом совершенно очевидно, а итальянского монаха Джордано Бруно , который говорил, что оно неверно, сожгли за это на костре.

Вообще, при споре двух людей один человек утверждает, что некоторое высказывание истинно, а другой *отрицает* это мнение, он имеет противоположное мнение. Например, если в контрольной работе ученик написал, что 2642=1098, а учитель перечеркнул это равенство, то он и ученик имеют по поводу произведения 2642 противоположные мнения. Можно сказать, что утверждения 2642=1098 и 26421098 *отрицают* друг друга, а каждое из них называют **отрицанием** другого. Примеры предложений, где в каждой паре одно является отрицанием другого:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Высказывание** | **Отрицание** |
| 1. | Москва – столица России. | Москва **не является** столицей России |
| 2. | 32 делится на 3 | 32 **не**делится на 3 |
| 3. | Дважды два - пять | Дважды два **не равно** пяти |
| 4. | Существует наибольшее натуральное число | **Не** существует наибольшего натурального числа |
| 5. | У Кати есть брат | У Кати **нет** брата |

И в жизни, и в математике с отрицаниями приходится сталкиваться на каждом шагу, поэтому очень важно научиться формулировать отрицание любого заданного предложения. В принципе, это очень просто: достаточно в начале данного высказывания приписать слова **«Неверно, что».** Например, отрицание предложения «У Кати есть брат» можно сформулировать как «Неверно, что у Кати есть брат», но, конечно, мы говорим «У Кати нет брата». Итак, для формулировки отрицания действуют как бы два приема: сначала «мысленно» присоединяют к предложению слова «Неверно, что», а затем «обрабатывают» полученное отрицание так, чтобы оно хорошо звучало на русском языке – можно сказать , переводят с русского на русский.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Предложение** | **Понимание отрицания** | **Формулировка отрицания** |
| 1. | На столе ничего нет | Неверно, что на столе ничего нет | На столе что-то есть |
| 2. | Число 13 простое | Неверно, что число13 простое | Число 13 не является простым |
| 3. | Мы еще не дожили до 21 века | Неверно, что мы еще не дожили до 21 века | Мы уже дожили до 21 века |
| 4. | Число, делящееся на 24, делится на 9 | Неверно, что число, делящееся на 24, делится на 9 | число, делящееся на 24, может не делится на 9 |

Таким образом, *задача формулировки отрицания – это задача из грамматики языка*, и для ее решения даже не надо задумываться о том, истинно или ложно то предложение, которое мы отрицаем. Главное состоит в том, что **если данное предложение истинно, то его отрицание ложно, и наоборот, если данное предложение ложно, то его отрицание истинно.** Другими словами, одно из двух предложений обязательно истинно – либо данное утверждение, либо его отрицание.

Этот факт представляет собой *закон логики*, и он называется **закон исключенного третьего**: истинно либо само утверждение, либо его отрицание ( а третьего не дано). И поэтому закон исключенного третьего часто произносится по латыни **tertium non datur** (терциум нон датур – третьего не дано).

Разумеется, что предложение и его отрицание не могут быть истинными *оба* – отрицание как раз и утверждает, что данное предложение неверно. Как говорят, предложение и его отрицание **противоречат** друг другу. Поэтому, если в каком-нибудь рассуждении мы получили, что истинны и утверждение и его отрицание, то есть получили **противоречие**, то в рассуждении допущена ошибка.

Для обозначения отрицания используется символ («кочерга»; читается «не» или «неверно, что»). Таким образом, отрицание предложения, обозначенного буквой А, обозначается через Если высказывание не получило имени, то после знака отрицания ставятся скобки: например, (34=16). Иногда для высказываний, обозначенных буквой, используется иная запись отрицания – черта над этой буквой. **Например, отрицание высказывания А есть .**

Для некоторых математических знаков при отрицании используются специальные обозначения. Так, вместо отрицания равенства пишут знак . **Например, вместо**

**(34=16) пишут просто 34**

Точно также наличие нескольких знаков неравенств позволяет заменить запись «с кочергой» на запись «без кочерги». **Например, (аb) a.**

**Задачи:***Построй отрицание высказываний с помощью слов «Неверно, что», а затем перефразируй их в более простой форме. Убедись в выполнении для них закона исключенного третьего.*

***1. Луна – спутник Земли.*** *(* Неверно, что Луна – спутник Земли. Луна не является спутником Земли. Одно из утверждений истинно – данное, а его отрицание – ложно. Третьего не дано).

***2.Дважды пять – восемь.*** (Неверно, что дважды пять – восемь. Дважды пять – десять. Данное утверждение – ложно, а его отрицание – истинно. **Tertium non datur).**

**3.**(Неверно, что **. .** Данное утверждение – истинно, а его отрицание – ложно. **Tertium non datur).**

**5.2.Отрицание общих высказываний**

Особую важность для математики представляет отрицание общих высказываний и высказываний о существовании. При этом формулировка отрицания должна быть не только грамотной с точки зрения русского языка, но и удобной для дальнейшего использовании в рассуждении. Нужно заметить, что самый простой прием – поставить «не» перед сказуемым – уже не действует, он может привести к грубой ошибке. Так, если мы применим его к высказыванию *«Все натуральные числа делятся на 3»*, то получим *«Все натуральные числа* ***не*** *делятся на 3*», или, более грамотно *«Ни одно натуральное число не делится на 3».* Но исходное высказывание ложно, и второе также ложно, чего по закону исключенного третьего не может быть.

В результате использования общего приема – поставить впереди данного предложения слова «Неверно, что» - получается предложение «Неверно, что все натуральные числа делятся на 3».Это предложение означает, что *не все натуральные числа делятся на 3* или, что то же самое, что *некоторые натуральные числа не делятся на 3.* Мы получили таким образом **высказывание о существовании:** *«Существует натуральное число, которое не делится на 3».* Это и есть отрицание данного высказывания.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Высказывание** | **Отрицание** |
| 1. | Число, оканчивающееся цифрой 4, обязательно делится на 4. | 1. Число, оканчивающееся цифрой 4, не обязательно делится на 4.  2.Существуют числа, которые оканчиваются цифрой 4, но не делятся на 4.  3.Существует хотя бы одно число, которое оканчивается цифрой 4, но не делится на 4. |
| 2. | Сумма двух правильных дробей также должна быть правильной дробью. | 1. Сумма двух правильных дробей может не быть правильной дробью.  2.Существуют две правильные дроби, сумма которых не является правильной дробью.  3.Существуют две правильные дроби, сумма которых является неправильной дробью. |
| 3. | Натуральное число, записанное с помощью трех единиц и 100 нулей, не может делится на 2. | 1.Натуральное число, записанное с помощью трех единиц и 100 нулей, может делится на 2.  2. Существует натуральное число, записанное с помощью трех единиц и 100 нулей, которое делится на 2. |

И вообще,

|  |
| --- |
| **Отрицание общего высказывания**  **есть**  **высказывание о существовании**. |

Этот факт можно понять и без всяких примеров – как говорят, в общем виде. Действительно, в общем высказывании утверждается, что *все* рассматриваемые предметы обладают некоторым свойством. Поэтому его отрицание означает, что *не все* предметы обладают эти свойством, то есть *существуют* предметы, которые этим свойством *не обладают*.

**Задачи**: Определи вид высказывания (общее или о существовании). Найди истинные и ложные. Для ложных общих высказываний построй отрицания и приведи контрпример.

***1****.****Каждое натуральное число делится на себя и на 1.*** (Общее, истинное).

***2****.****Некоторые числа имеют только один делитель.*** (О существовании, истинное).

***3****.****Любое натуральное число имеет хотя бы два делителя.*** (Общее, ложное. Неверно, что любое натуральное число имеет хотя бы два делителя. Или: существует натуральное число, которое имеет один делитель. Контрпример – 1).

**5.3. Отрицание высказываний о существовании**

*Высказывание о существовании означает, что существует предмет, обладающий некоторым свойством.* Его *отрицание* означает наоборот, что *не существует* предмета с данным свойством, то есть *ни один* предмет из рассматриваемых данным свойством не обладает.

Полученное высказывание - общее, в нем отрицается существование предметов с данным свойством, и именно поэтому в соответствии с нормами русского языка, в нем применено словосочетание «ни один…ни». Тот же смысл имеет предложение «Все рассматриваемые предметы данным свойством не обладают» - более «корявое» с точки зрения русского языка, но зато явно показывающее, что оно есть общее высказывание. Таким образом,

|  |
| --- |
| **Отрицание высказывания о существовании**  **есть**  **общее высказывание** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Высказывание** | **Отрицание** |
| 1. | Некоторые птицы умеют плавать. | Ни одна птица не умеет плавать. |
| 2. | Существуют натуральные числа, кратные 6, но не кратные 2. | Всякое натуральное число, кратное 6, кратно 2. |
| 3. | Число 563 можно представить в виде 7k, где k – натуральное число. | 1.Число 563 нельзя представить в виде 7k, где k – натуральное число.  2.Для любого kN: 5637k. |

**Задачи:** Определи вид высказываний и установи их истинность или ложность. Для ложных высказываний построй отрицания.

***1.Каждая неправильная дробь больше 1.*** *(*Общее, ложное. Существует неправильная дробь не больше 1).

***2.Существует неправильная дробь с числителем 2, большая двух седьмых.*** (О существовании, истинное).

***3.Некоторые дроби нельзя привести к одинаковому знаменателю.*** (О существовании, ложное. Все дроби можно привести к одинаковому знаменателю).

**6. Переменная**

**6.1.Понятие переменной. Выражения с переменной. Предложения с переменной.**

Решая текстовые задачи, мы видим, что буквы в выражениях как бы играют роль «пустых мест» - вместо них можно подставлять числа. Такие буквы называют **переменными**, в отличие от цифр и знаков математических действий – «постоянных букв» математического алфавита. А сами буквенные выражения называют **выражениями с переменными**. Например, a2+ 3a– это выражение с переменной а;

(5x-y):10 – выражение с переменными х и у.

После замены букв числами выражение становится числовым, а его значение – числом. Например, если а=7, то a2+ 3a=72 +37=70. Полученное число называется **значением выражения** при указанном значении буквы.

Примеры «переменных» можно встретить и в практической жизни: людям часто приходится заполнять разные анкеты, паспорта, справки и вообще тексты, заполненные лишь частично. После заполнения всех прочерков бланк становится документом. Точно такое же выражение с переменными – « бланк с прочерками» - после замены всех букв числами становится числом.

Итак,

|  |
| --- |
| *Переменной называют букву или другой объект, вместо которого подставляют элементы какого–нибудь множества.*  *То, что подставляют вместо переменной, называют значением переменной.* |

Понятие переменной появилось в математике сравнительно недавно – лишь в 19 веке, и оказало огромное влияние не только на развитие самой математики, но и на развитие других наук, и всей жизни людей.

Переменные употребляют в математике не только в выражениях. Буквы встречают и в самых разных математических предложениях. Данное предложение становится высказыванием – истинным или ложным, - если переменной х придать конкретное числовое значение. Можно сказать, что это – переменное высказывание или предложение с одной переменной х.

Как и буквенное выражение, предложение может содержать и несколько переменных. Например, предложения:

x>y - c двумя переменными x и y;

s=v t - c тремя переменными s, v и t.

Для того, чтобы предложение с несколькими переменными превратилось в высказывание, надо придать значение каждой из переменных. Например, придав в первом предложении х=2, y=3, мы получим ложное высказывание 2>3. Если же придать значение только одной переменной, то опять получится предложение с переменной.

Предложение с переменными не обязательно при одних значениях истинно, а при других – ложно. Может случиться, что при любых значениях переменных оно всегда истинно, или, наоборот, всегда ложно. Например, всегда истинны все законы арифметических действий.

*Высказывания – предложения без переменных* – обозначаются большими латинскими буквами. Для обозначения предложений с переменными также употребляют такие буквы, но дополнительно в скобках имена входящих в них переменных. Например, символом P(n) может быть обозначено предложение «Число n – четное», символом Q(x) – предложение «x2=2x+3» и т. д. Записывают так:

P(n)Число n четное, Q(x) x2=2x+3.

**6.2. Переменная и кванторы**

Математический язык позволяет записывать высказывания в компактной форме. Например, утверждение «Для того, чтобы найти пройденный путь, можно скорость движения умножить на время» на математическом языке записывается просто « s=vt», а высказывание «Элемент а не принадлежит множеству А» записывается «аА».

Для общих высказываний и высказываний о существовании также имеется способ их сокращенной записи. Высказывания **о существовании** сокращенно записывают символом  **(существует такой, что…),** который называют **квантором существования**.

Для записи **общих высказываний** употребляется символ («для любого», «для каждого», «для всякого»…), который называют **квантором общности.**

Чтобы записать утверждения с помощью кванторов, вначале нужно ввести переменную и ввести обозначение для множества, в котором эта переменная принимает значения. Например, высказывание «Существует натуральное число, квадрат которого больше 8, но меньше 12» записывается так:

<12.

, с помощью квантора записываются и общие высказывания.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Русский язык** | **Логический язык** |
| 1. | Любая правильная дробь меньше 1. | p (P – множество правильных дробей) |
| 2. | Всякое натуральное число больше 2. |  |
| 3. | От перемены мест слагаемых сумма не меняется . | (R – множество всех чисел) |

**Задачи:** Запиши утверждения с помощью кванторов существования и общности.

***1.У каждой реки есть исток.*** ( (Х – множество рек)).

***2.Диаметры одной окружности равны.*** ( (D – множество диаметров).

***3. Прямые при пересечении могут образовывать прямой угол.*** ( (X – множество прямых).

**6.3. Отрицание утверждений с кванторами**

Отрицание общих высказываний и высказываний о существовании красиво записывается на логическом языке. Пусть дано предложение Р(х) с переменной х. Тогда соответствующее общее высказывание имеет вид . Отрицание общего высказывания означает, «Не все х обладают свойством Р(х)», то есть существует хотя бы один предмет, который указанным свойством не обладает. Таким образом, *закон отрицания общего высказывания имеет вид:*

|  |
| --- |
| ***.*** |

, «перепрыгивает» через него и становится перед исходным предложением с переменной. Например,

Закон отрицания высказывания о существовании выглядит на логическом языке аналогично закону отрицания общего высказывания:

|  |
| --- |
|  |

Мы видим, что и здесь знак отрицания ведет себя так же: он меняет квантор на другой, «перепрыгивает» через него и становится перед исходным предложением с переменной. Например,

.

**Построй отрицание утверждений:**

**1..** Отрицание:

**2..** Отрицание:.

**Задачи:**  Опровергни утверждения и запиши их отрицания на математическом языке:

**1.**

**Решение:**

**2.n=3**

**Решение: n=3] 3.**

**7. Логическое следование**

**7.1.Понятие логического следования**

В этом вопросе мы рассмотрим одно из самых главных логических понятий - понятие *следования.* В русском языке ему соответствует чаще всего предложение с союзом «если…, то…». Например, «**Если** где-то идет дождь, **то** земля в этом месте и в это время мокрая».

Такие предложения обычно можно заменить предложением с глаголом «следовать». Например, можно сказать: « Из этого, что где-то идет дождь, **следует,** что земля в этом месте и в это время мокрая». Правда, такое предложение с точки зрения языка является несколько искусственным, корявым, и в обычной речи вряд ли встречается.

Несмотря на то, что в этом предложении нет ни одного «общего» слова, оно *является общим высказыванием,* поскольку имеется в виду именно общее свойство: каждый раз, когда идет дождь, земля мокрая.

Аналогично можно переформулировать и другие предложения, независимо от того, истинные они или ложные. Например:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Если…, то…** | **Из того, что…, следует, что…** |
| 1а | **Если** натуральное число делится на 9, **то** оно делится на 3. | **Из того, что** натуральное число делится на 9, **следует, что** оно делится на 3. |
| 1б | **Если** натуральное число делится на 3, **то** оно делится на 9. | **Из того, что** натуральное число делится на 3, **следует, что** оно делится на 9. |
| 2б | **Если** дробь неправильная, **то** обратная к ней дробь правильная | **Из того, что** дробь неправильная, **следует, что** обратная к ней дробь правильная. |

Для краткой записи соответствующих высказываний на математическом языке в математике имеется специальный знак- *знак следования.* С помощью этого знака предложение 1а и 1б записываются так:

Мы ввели переменную *n*, записали *условие* «*n* делится на 9», поставили знак, после которого поставили *заключение* «*n* делится на 3». При этом мы использовали ту же букву *n* , так как в заключении местоимение «оно» означает, что речь идет *о том же натуральном числе, что и в условии.*

Мы видим, таким образом, что знак следованиясоединяет два предложения с переменными и делает из них новое *высказывание* общего вида: из первого предложения  *следует*  второе. Первое предложение называют  *условием,* а второе – *заключением ,* или *следствием* первого.

Запись *Р Q* можно читать « по-русски»:

**«Если *P*, то *Q*»,**

или «по - математически»:

**«Из *P* следует *Q*», «*Q* есть следствие *P*».**

Вместо слова «следует» часто говорят более метафорически – «вытекает», и знакпоказывает тогда «направление течения»: из первого предложения вытекает второе.

Мы постоянно говорим, что *логика помогает правильно рассуждать. Сила ее в том, что она дает возможность получать новые знания без наблюдения или опыта, при помощи размышления и рассуждения.* Конечно же новое знание не получается из ничего, а выводится из уже имеющегося. Для того, *чтобы знание, полученное с помощью логических рассуждений, было истинным,* т.е. правильно отражающим действительность, *необходимо (и достаточно*) выполнение двух условий. *Первое.* Исходное знание должно быть истинным. *Второе.* Рассуждение должно быть правильным, т.е. заключение (предложение, выражающее новое знание) должно **логически следовать** из посылок (предложений, выражающих исходное знание). Если оба эти условия выполнены, то в истинности знания, полученного рассуждением, можно не сомневаться. Если же хоть одна из посылок неверна (ложна), то абсолютно правильное рассуждение может привести к ложному заключению. Говорят, что «из лжи следует все, что угодно» (как истина, так и ложь). Правильность рассуждения определяется его **формой.** Правильное по форме рассуждение при истинных посылках всегда дает истинное заключение.

Уже в начальной школе мы получили представление об основных формах элементарных рассуждений (умозаключений) с помощью диаграмм Эйлера-Венна, названных так по имени создателей системы графического представления логических форм и отношений – её основателя Леонарда Эйлера (1707-1783) и Джона Венна (1834 – 1923), который развил систему Эйлера, существенно расширив возможности её применения.

Научиться рассуждать и проверять правильность рассуждений помогают круговые схемы.

**Хочешь рассуждать – рисуй!**

**Задача 1.** Однозначные числа 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разделены на 4 группы:

I – четные и не делящиеся на 3 - А=;

II – четные и делящиеся на 3 - В=;

III- нечетные и делящиеся на 3 – С=;

IV– нечетные и не делящиеся на 3 – D=.

Как ответить на **вопрос** – **сколько среди этих чисел таких, которые четны или делятся на 3?** – Понимая ИЛИ в неразделительном смысле, нужно объединить и пересчитать все четные числа и все делящиеся на 3, включая 6, которое и четно, и делится на 3, т.е. А.

**1**

7

5

А как ответить на **вопрос – сколько среди этих чисел и четны и делятся на 3?-** Ответ в условии задачи – одно число 6.

**Задача 2.** Посмотри на рисунок и ответь на вопросы:

**1.** Сколько среди данных чисел: а) четных; б) простых?

2.Сколько чисел простых и четных одновременно?

3. Сколько чисел простых или четных?

**четные**

**4 6 6 8**

**10 12**

**простые**

**3 5**

**7 11**

Ответы: 1) а) четных – 5; б) простых – 4.

2) таких чисел нет, т.к. пересечение кругов пусто.

3) все данные числа: каждое из этих чисел четное **или** простое.

**Задача 3.**Закончите рассуждения.

**1.**Все Митины одноклассники – шахматисты. Все шахматисты – спортсмены.

класс

Следовательно, все Митины

**спортсмены**

одноклассники – …..

**шахматисты**

спортсмены.

( спортсмены).

2. Все Митины одноклассники занимаются в шахматной секции. Никто из этой секции не играет в теннис. Следовательно, никто из Митиных одноклассников ….

**теннис**

**класс**

**шахматы**

(не играет в теннис)

3. В Катином классе гимнастикой занимаются только девочки, а шахматами – только мальчики. Следовательно, а) ни одна Катина одноклассница не …; б) ни один Катин одноклассник …

**класс**

а) не шахматистка;

**Гимнас**

**тика**

б) не гимнаст.

**Шахма**

**ты**

4. Аркадий, Виктор, Григорий и Сергей участвовали в шахматном турнире. Известно, что Виктор не занял первого места, Сергей получил приз за второе место, Аркадий не занял ни первого, ни последнего места. Какое место занял каждый из ребят?

А I *Пояснение к схеме*

B II тонкая сплошная линия показывает, что место не занято,

Г III жирная сплошная – место занято

C IV

**7.2.Отрицание следования**

Итак, из того, что где-то идет дождь, *следует,* что земля в этом месте и в это время мокрая. С другой стороны, каждому понятно, что если земля мокрая, то отсюда вовсе *не следует*, что в это время и в этом месте идет дождь: вполне может оказаться, что землю специально полили.

Другими словами, для обоснования высказывания « Из того, что земля мокрая, *не следует,* что идет дождь» мы приводим пример ситуации, когда условие « земля мокрая» истинно, а заключение «идет дождь» ложно.

Точно также обстоит дело и с математическими предложениями. Например, из того, что n делится на 5, *не следует,* что n оканчивается цифрой 5. Ведь число 10 делится на 5, но не оканчивается на 5.

Мы видим, что для обоснования предложения со словами «не следует» достаточно привести пример, когда условие истинно, а заключение ложно. Это и понятно: мы уже говорили, что предложение со словом «следует» является общим высказыванием, а чтобы доказать, что общее высказывание ложно, достаточно привести хотя бы один *контрпример.* Еще раз подчеркнем, что для **этого контрпримера условие должно быть истинным, заключение ложным.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Ложное высказывание** | **Контрпример** |
| 1б | Если натуральное число делится на 3, то оно делится на 9, или  ) n делится на 3*n* делится на 9. | 3 делится на 3 (условие истинно), но не делится на 9 (заключение ложно). |
| 2б | Если дробь неправильная, то обратная к ней дробь правильная, или | Дробь :  Эта дробь неправильная (условие истинно), и обратная к ней дробь неправильная (заключение ложно). |

Итак, отрицанием *РQ* следования является предложение

­­­­­­­­­­­­­¬ (*Р Q*), или

которое читается «**Неверно, что** из *P* следует *Q*» или «Из *P* ***не следует*** *Q*». Для его обоснования достаточно привести пример, когда *P* истинно, а *Q* ложно.

**7.3.Обратное утверждение**

**Определение.** Предложение «Если *Q* , то *P*» (*Q Р*) называется **обратным** к предложению «Если *P*, то *Q*» (*Р Q*).

Таким образом, чтобы получить предложение, обратное к предложению с союзом «если….., то….», надо просто поменять в нем местами условие и заключение. Отсюда и употребление слова «обратное»:  *в обратном предложении условие и заключение идут в обратном порядке*.

При этом заданное предложение *Р Q* является *обратным* к своему обратному *Q Р*. Поэтому утверждения *Р Q* и *Q Р* называются **взаимно обратными.**

Если предложение явно сформулировано как условие с союзом «если…, то….», то переход к обратному утверждению не представляет никакого труда. Однако в русском языке имеется много разных способов выражения одной и той же мысли, поэтому обратное предложение существует не только для условных предложений, но и для высказываний общего вида.

Поэтому **для перехода к обратному предложению мы просто можем поменять местами тему и рему в заданном предложении.**

Например:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Общее высказывание** | **Обратное высказывание** |
| 1. | Все счастливые люди – добрые. | Все добрые люди – счастливые. |
| 2. | Сумма углов любого треугольника равна 180. | Если сумма углов многоугольника равна 180, то этот многоугольник является треугольником. |

Отсюда следует, что обратное предложение можно построить и без всякого понимания смысла употребленных слов. А значит, понятие обратного утверждения требует в большей степени знания грамматики, чем логики или математики.

**7.4. Следование и равносильность**

Понятие следования, оказывается, тесно связано с понятием равносильности.

Мы знаем, например, что предложения х<у и у>x означают одно и то же, равносильны:

х < у у > х

С другой стороны, ясно, что каждое из двух предложений х<у и у>х следует из другого:

х < у у > х, у > х х< у.

Таким образом, равносильность х < уу > х означает тоже самое, что одновременная истинность этих двух взаимно обратных утверждений. И, вообще, сказать: «Предложения с переменными *P* и Q равносильны», - это то же самое, если сказать, что «истинны следования: *Р Q* и *Q Р».*

Можно записать сделанный вывод символически, хотя запись получается не слишком простой и немного похожей на ребус, то есть без навыка не сразу поддается расшифровке:

*(РQ)(Р Q* и *Q Р).*

Но в действительности эта запись расшифровывается без особого труда: достаточно заменить мысленно стоящий вторым знак на русское «означает, что». А скобки поставлены для того, чтобы ясно показать, о равносильности каких предложений идет речь. Если хотя бы одну из этих пар скобок не поста­вить, мы получим записи, которые можно толковать по-разному:

*РQ (Р Q* и *Q Р), (Р Q) РQ* и *Q Р.*

В первой из них не понятно, какие *два* предложения равносильны; во второй не понятно, что соединяет союз «и».

Мы видим, что в выражениях логического языка скобки играют ту же самую роль, что и пун­ктуация в естественном языке. Точно так, смысл предложения «КАЗНИТЬ НЕЛЬЗЯ ПОМИЛОВАТЬ» невозможно понять, не зная, как в нем расстав­лены знаки препинания!

В речи знак равносильности выражается с помощью таких оборотов, как: «тогда и только тогда» ,«если и только если», «в том и только том случае», «это значит», «необходимо и достаточно» и др.

Например,

«разделить *а* на *b* - ***это значит*** найти такое число *с,* которое при умножении *b* на дает *а»,*

«чтобы поставить мировой рекорд, ***необходимо и достаточно*** показать результат лучше мирового рекорда» и т.д.

**Задача:** Допиши предложение так, чтобы получились истинные высказывания. Какие два следования объединены в этом предложении?

х2=49 х= **7**  или х= **- 7**.

(х2=49)( 7249 и (-7)2).

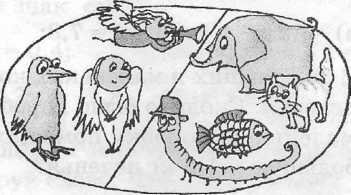
**7.5. Следование и свойства предметов**

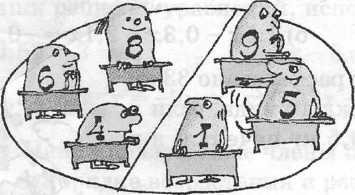
Каждый объект из окружающего нас мира обла­дает какими-то свойствами: животное во дворе может быть птицей или кошкой, иметь две или четыре ноги, книга у тебя на столе может быть художественной или учебной, оркестр может быть симфоническим или джазовым, большим или маленьким и т. д.

Точно так и абстрактные объекты обладают определенными свойствами: предложение может быть сложным или простым, сложно-сочиненным или сложно-подчиненным, в языке может существовать или не существовать ар­тикль, человеческая цивилизация может использовать или не использовать атомную энергию, страна может быть или не быть монархией и т.д.

Это касается и математических объектов: натуральное число может быть четным или нечетным, простым или составным, может делиться на 3 и одновременно делиться на 5; дробь может быть или не быть правильной, уравнение может иметь корни или не иметь корней, высказывание может быть истинным и т.д.

Известные нам предложения с одной или несколькими переменными опи­сывают свойства предметов и объектов. Например, предложение «*n* - четное число *(п******N*)» соответствует свойству натуральных чисел «быть четным», «*х* имеет две ноги *(х********А,* где *А -* множёство живых существ)» соответствует свойству живых существ иметь две ноги и т.п.

Каждое свойство разбивает множество предметов, о которых идет речь, как правило, на два класса: обладающие данным свойством и не обладающие им. В первом из приведенных примеров это множество четных чисел и множество нечетных чисел, во втором примере один класс состоит из людей, птиц и дру­гих животных, имеющих две ноги, другой - из остальных живых существ.



Мы аккуратно сказали «как правило», поскольку может оказаться, что ни один из элементов множества данным свойством не обладает или, напротив, все элементы обладают этим свойством. Это особенно важно для математики, где очень часто речь идет о свойствах, о которых заранее ничего сказать нельзя.

Особый интерес для всех наук представляют **общие свойства** предметов. Если для конкретного человека существенны обычно свойства конкретного предмета, то науки интересуются свойствами, относящимися к целым множе­ствам, классам предметов.

Например, выбирая новогоднюю елку, че­ловек обычно интересуется высотой конкрет­ного дерева, его свежестью, раскидистостью...А биологи будут говорить о ели, что это дере­во, хвойное, покрытосеменное и т.д. Другими словами, биолога интересуют те свойства, ко­торыми обладают *все* ели, или, как говорят, свойства *общего понятия* «ель».

В рассмотренном примере можно записать:

|  |
| --- |
| х – ель х – хвойное, покрытосеменное  ( х D, где D – множество деревьев) |

|  |
| --- |
| a делится на b(а,b,с N). |

Таким образом, предложения, выражающие общие свойства предметов,  
можно представить в виде логического следования.

Обратное к логическому следованию утверждение тоже является следованием и может быть истинным или ложным. Так, утверждение, обратное первому предложению, ложно, так как сосна тоже является деревом хвойным и покрытосеменным. А вот предложение, обратное второму, истинно по определению делимости.

Итак, в определении мы имеем дело не просто с логическим следованием, а с равносильностью. Свойства, равносильные определению понятий, называются *характеристическими* свойствами, или **признаками.**

Например, определение параллелограмма на математическом языке можно записать так:

|  |
| --- |
| Df  ABCD – параллелограмм  Df |

Df– от латинского definition – определение.

**8. Использование основных математических символов и логических операторов в теории вероятностей.**

***Сложное событие*** (а или b) записывать можно двумя способами: **ab, a + b.** Значки «», «+» в данном случае называют логическим сложением или ***дизъюнкцией***, а событие ***a или b = а b = a + b*** называют ***суммой*** двух событий.

Если ***события a и b – несовместные****,* то для вычисления вероятностей справедливо правило ***p(аb) = p(a) + p(b)***

Эту формулу называют СЛОЖЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ.

Можно встретить и такие записи:

***p(а или b) = p(a) + p(b), p(а + b) = p(a) + p(b)***

Это правило можно проговорить словами:

***Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей каждого из событий.***

**Пример .** Бросаем игральную кость. Нас интересует событие: «выпало 3 очка или четное число». Это событие – сложное и является суммой двух простых событий: **а** = «выпало 3 очка», **b**= «выпало четное число очков». По классическому определению вероятности имеем: p(a) = 1/6; p(b) = 3/6. По правилу для несовместных событий **a**, **b** (в одном эксперименте оба сразу произойти не могут)

***p(аb) = p(a) + p(b) = 1/6 + 3/6 = 4/6 = 2/3****.*

Проверим это вычисление непосредственным подсчетом для события **а b**= «выпало 3 очка или четное число». При бросании игральной кости всего исходов будет шесть, из которых благоприятствующих событию**а b**, как легко сообразить, будет четыре (выпало 3, 2, 4, 6 очков). По определению вероятности пишем

***p(а b) = 4/6 = 2/3.***

Два единственно возможных и несовместных события называют ***ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ*** событиями. Если событие обозначить **а**, то противоположное ему событие обозначим ¬**а** (читаем как «не а»). Сообразим при этом, что

***р(¬a) = 1– p(a).***

***Для двух независимых и совместных событий a****,* ***b*** вероятности вычисляются по правилу:

***р(аb) = p(a) · p(b).***

Правда, в различных книжках это правило записывают различно:

***p(а · b) = p(a) · p(b), p(а и b) = p(a) · p(b).***

Словами это правило проговаривают так:

***Вероятность произведения независимых и совместных событий равна произведению вероятностей каждого события.*** Это правило называют **ТЕОРЕМОЙ УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.**

Итак, если в сложном событии есть союз **ИЛИ**, то вероятности – **складывают**, если есть союз **И,** то вероятности **умножают.**

**Пример 1.** Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,7. Какова вероятность, что попали оба?

Пусть **а** = «попал первый стрелок», **b = «**попал второй стрелок». По условию ***p(a)* *= 0,8; p(b) = 0,7****.* Заметим теперь, что **а, b** – совместные и независимые события. Тогда

***p(ab) = p(a)p(b) = 0,80,7 = 0, 56.***

**Пример 2.** При условиях примера 1 вычислим вероятность поражения мишени. Сложное событие с - «мишень поражена» можно записать

***c = (ab) (a¬b) (¬ab).***

Три события, записанные в скобках, несовместны, поэтому можно применить правила вычисления вероятностей:

***p(c) = p(ab) + p(a¬b) + p(¬ab) =***

***= p(a)∙p(b) + p(a)∙p(¬b) + p(¬a)∙p(b) = 0,8∙0,7 + 0,8∙0,3 + 0,2∙0,7= 0,94***

Сложное событие c можно записать и так: ***с = ab*** («c равно a или b»). Так вот, в теории вероятностей есть более удобная формула подсчета вероятностей:

***p(ab) = p(a) + p(b) – p(ab).***

В нашем примере 2 эта формула дает ***p(ab) = 0,8+0,7- 0,80,7=0,94,*** что точно совпало с предыдущим расчетом.

**Пример 3.** Два ученика готовы выполнить контрольную работу с вероятностью 0,8 каждый. Вычислим теперь вероятность того, что они **оба** выполнят контрольную работу.

**a** = «первый ученик выполнит контрольную работу»,

**b** = «второй ученик выполнит контрольную работу».

***Тогда p(ab) = 0,8∙0,8=0,64.***

Обратим внимание на то, что вероятность того, что оба выполнят работу **меньше** вероятности выполнить работу **каждым**.

Вычислим теперь вероятность того, что контрольную работу выполнит **хотя бы один ученик:**

***p(ab) = 0,8+0,8-0,8∙0,8 = 0,96.***

Вероятность в этом случае больше, чем вероятность выполнить работу отдельным учеником.

**Пример 4.** Известно, что 90% продукции завода – стандартные изделия. Из этих изделиё 80% - первого сорта. Какова вероятность того, что взятое наугад изделие будет первого сорта?

Для решения (как и всегда) введем события: **а** = «наугад взятое изделие - стандартное», **b** = «наугад взятое событие – первого сорта». По условию ***p(a) = 0,9; p(b) =0,8****.* более того **а, b** – зависимые и совместные события. Поэтому

***p(ab) =0,9∙0,8 = 0,72.***

**9. Примеры заданий с использованием операторов и основных математических символов в алгебраических задачах*.***

**Связь между связками (или, и), бинарными операторами () и скобками () и использование знака (равносильности или эквивалентности) при решении математических заданий. Как влияет на ответ задания ?**

**№1. Решите систему уравнений**

**Решение.**

Пусть = t, (x. Тогда t2 +t – 6 = 0;

t2 +t – 6 = 0;

Ответ: (2;1), (4,5; -1,5).

**№2. Решите уравнение |sinx|=sinxcosx.**

**Решение.**

1). sinx=0 x=

2).

3).

Ответ: x=

**№3. Решите систему неравенств**

**Решение.**

**1)**Решим первое неравенство системы:

,

,

x1=2, x2=7.

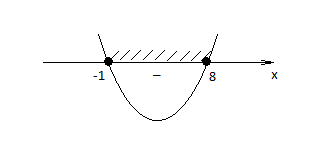


2<x<7.

**2) Решим второе неравенство системы:**

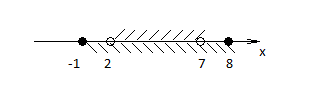
;

x1=-1, x2=8.



-1

**3).Найдем решения системы неравенств:**



2<x<7

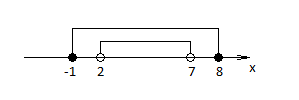
Ответ: (2;7)

**№4.Решите совокупность неравенств**

**Решение.**

Шаг 1 и 2 повторяем.

3)



-1.

Ответ: .

Итак: **система, и,; совокупность, или, .**

**Что касается геометрии,** то доказательство любой теоремы, также как и решение любой геометрической задачи – это **постоянный логический процесс,** без которого сам предмет геометрии просто существовать не может. Запись же решения задачи и доказательства теоремы с помощью символов значительно сэкономит время.

**Вместо заключения.**

Когда люди разговаривают, они не только сообщают друг другу некоторую информацию, но и определенным образом обосновывают свое мнение. Это начи­нается с раннего детства, и когда мама предлагает сварить ребенку манную кашу, а он говорит: «Не надо, потому что я ее не люблю», то в его *потому что* уже содер­жится *логика.*

Ребенок рассуждает примерно следующим образом: «Я не люблю манную кашу, следовательно, я не буду ее есть». Никто не хочет работать напрасно, зна­чит, и мама тоже. Но если она сварит кашу, то работа будет напрасной. Если чело­век работал напрасно, он огорчается. Я не хочу огорчать маму, поэтому и говорю «не надо».

Если же мама скажет, что манную кашу надо есть, чтобы быстрее расти, то за этим *чтобы* тоже скрывается логика: «Ребенок, который ест манную кашу, быст­рее растет, а ты хочешь быстрее расти, *поэтому* ты должен ее есть».

Чем закончится диалог - неизвестно, но уже первые фразы показывают, что это *«уважительный* диалог», где мама не приказывает, ребенок не капризничает, но каждый из них объясняет, аргу­ментирует свое поведение.

Историки считают, что математика в Древней Греции зародилась с развитием демократии - политическом строе, где человека надо убеждать, в отличие от тирании - строе, где человеку достаточно приказывать. Но уважительный диа­лог возможен, когда люди придерживаются одних и тех же правил, и это прежде всего правила логики. Фактически правила логики усваиваются через язык с ран­него возраста, но математика учит их применять более осознанно.

Общие правила логических рассуждений впервые описал один из величайших ученых в истории человечества - древнегреческий философ Аристотель. Это было примерно 2500 лет назад. Формулируя эти правила, Аристотель опирался на че­ловеческую практику, на естественный язык.

Надо честно признаться, что до сих пор в школьных учебниках систематически «грешили» против строгой логики математики, и типичной логической ошибкой была необоснованная *индукция -* переход от одного или нескольких примеров к общему выводу. Этот же путь прошла в своем развитии и сама наука математика: путь наблюдений, выявления различных закономерностей, выдвижения гипотез, поиска способов их доказательства.

Гениальным открытием в истории математики был *аксиоматический метод,* который блестяще осуществил александрийский геометр Евклид, живший около 2300 лет тому назад. В своей книге «Начала» ему удалось свести вместе результа­ты, полученные многими поколениями ученых: он построил геометрию, в которой любое рассуждение строится как строгая последовательность логически обоснованных выводов. Эта *евклидова* геометрия и составляет основу современного курса геометрии старших классов, который является для каждого человека важ­ным шагом в освоении искусства «уважительного диалога».*.*

Сегодня дедуктивный метод используется не только в геометрии, но и во всех разделах математики, в том числе и в алгебре, которая также изучается в стар­ших классах. И, несмотря на то, что геометрия и алгебра имеют разные предметы исследования - геометрия изучает пространственные формы предметов окружа­ющего мира, а алгебра - количественные отношения между ними, - общим фун­даментом алгебры и геометрии являются законы логики.

**Заключение**

В процессе исследования цель работы достигнута, полностью решены поставленные задачи и получены следующие результаты и выводы:

1. Собран и изучен теоретический материал.

2.По каждому вопросу рассмотрено достаточно примеров, где показано применение языка математической логики.

**Практическая значимость работы** состоит в том, что знания, полученные при работе над этой темой, несомненно помогут нам рассуждать более логично и не только на уроках математики; выражать свои мысли кратко, но полно; экономить время при записи доказательства теорем и решении задач, а самое главное – помнить, что каждый символ несет свою информацию и от знания этого зависит верность решения задач.

**Список используемых источников информации**

1. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 класс. Часть 1. – М.: Издательство «Ювента», 2005. – 176 с.: ил.

2.Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 6 класс. Часть 1. – М.: «Баллас», «С-инфо», 2004. – 112 с., с ил.

3.Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 6 класс. Часть 3. – М.: «Баллас», «Ювента», 2004. – 176 с, ил.

4. Петерсон. Л.Г.»Математика 5-6 класс. Методические материалы к учебникам Г.В.Дорофеева, Л.Г.Петерсон».-М.: Школа 2000… . 2003.

Интернет ресурсы:

5. Аcademic.ru. Математическаялогика.

6. philosophy.ru.

7. Wikipedia.orq. Математическая логика.